Subiectul II — integral

Matematica — M2_Stiinte-ale-Naturii

Subiectul întreg, din toate modelele de examen ale categoriei de mai sus.

204 exerciții · din 204 sesiuni (2012–2026)

1. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2012 · Model Oficial

2012_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Model_Oficial_Subiect.pdf

	1. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A_n\left(n-1,n+2\right)$, $n\in\mathbb{N}^*$.
5p	**a)** Determinați ecuația dreptei A_1A_2.
5p	**b)** Demonstrați că punctele A_m, A_n, A_p sunt coliniare, oricare ar fi $m,n,p\in\mathbb{N}^*$.
5p	**c)** Pentru fiecare $p\in\mathbb{N}^*$ notăm $M_p=\left\{n\in\mathbb{N}^*\,\middle|\,A_nA_p\leq 2\right\}$. Determinați elementele mulțimii M_{2011}.

2. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2012 · Model Oficial

2012_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Model_Oficial_Subiect.pdf

2. Se consideră polinomul $f = X^3 + (m-3)X^2 - 17X + (2m+7)$, cu $m \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Pentru $m = 4$ determinați câtul şi restul împărțirii polinomului f la $X - 3$.

5p **b)** Determinați $m \in \mathbb{R}$ pentru care polinomul f este divizibil cu $X - 1$.

5p **c)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $27^x + 9^x - 17 \cdot 3^x + 15 = 0$.

SUBIECTUL al III-lea

3. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2012 · Speciala Subiect V07 · V07

2012_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Speciala_Subiect_V07.pdf

1. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} x+y-2z=0 \\ x-y+z=1 \\ x+y+az=2 \end{cases}$, unde $a \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Calculați determinantul matricei asociate sistemului.

5p **b)** Determinați valorile reale ale lui a pentru care matricea asociată sistemului este inversabilă.

5p **c)** Pentru $a=0$, rezolvați sistemul de ecuații.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = x + y - 1$.

4. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2012 · Speciala Subiect V07 · V07

2012_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Speciala_Subiect_V07.pdf

5p | **c)** Pentru $a=0$, rezolvați sistemul de ecuații.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=x+y-1$.

5p | **a)** Arătați că $x*1=x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

5p | **b)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x*x*x=4$.

5p | **c)** Determinați numărul natural n, $n\geq 2$, pentru care $C_n^1*C_n^2=14$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de**

5. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2012 · Toamna August · V09

2012_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V09.pdf

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+ay+3z=1 \\ 4x+a^2y+9z=1 \end{cases}$, unde $a\in\mathbb{R}$ şi se notează cu A matricea sistemului.

5p **a)** Arătați că $\det A=-a^2+5a-6$.

5p **b)** Determinați valorile reale ale numărului a pentru care matricea A este inversabilă.

5p **c)** Pentru $a=1$, rezolvați sistemul.

6. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2012 · Toamna August · V09

2012_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V09.pdf

2. În $\mathbb{Z}_5[X]$ se consideră polinomul $f=mX^5+nX$, cu $m,n\in\mathbb{Z}_5$.

5p **a)** Determinați $n\in\mathbb{Z}_5$ pentru care $f(\hat{1})=m$.

5p **b)** Pentru $m=\hat{1}$ şi $n=\hat{4}$, determinați rădăcinile din $\mathbb{Z}_5$ ale polinomului f.

5p **c)** Arătați că, dacă $f(\hat{1})=f(\hat{2})$, atunci $f(\hat{3})=f(\hat{4})$.

7. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2012 · Vara Iunie · V05

2012_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V05.pdf

1. Se consideră matricele $H(x)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ln x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, cu $x\in(0,+\infty)$.

5p **a)** Arătați că $\det(H(x))=1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați numărul real a, $a>0$, astfel încât $H(x)\cdot H(a)=H(x)$, pentru orice $x>0$.

5p **c)** Calculați determinantul matricei $H(1)+H(2)+\ldots+H(2012)$.

8. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2012 · Vara Iunie · V05

2012_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V05.pdf

2. În $\mathbb{R}[X]$ se consideră polinomul $f = X^3 + 3X^2 - 3X - 1$, cu rădăcinile x_1, x_2, x_3.

5p **a)** Arătați că polinomul f se divide cu $X - 1$.

5p **b)** Calculați $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

5p **c)** Verificați dacă $(2 - x_1)(2 - x_2)(2 - x_3) = 13$.

SUBIECTUL al III-lea

9. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2013 · Model Oficial

2013_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Model_Oficial_Subiect.pdf

1. Pentru n număr natural se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2n+1 & n & 1 \\ 2n^2+1 & n^2 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Calculați suma elementelor matricei A.

5p **b)** Determinați numerele naturale n pentru care matricea A are determinantul diferit de zero.

5p **c)** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$ și $A_n(2n+1,n)$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$. Determinați valorile numărului natural n, $n\geq 2$ pentru care aria triunghiului $OA_nA_{n^2}$ este egală cu n^2-3.

10. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2013 · Model Oficial

2013_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Model_Oficial_Subiect.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x \circ y = x + ay + 1$, unde $a \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Pentru $a = 1$ calculați $2011 \circ 2012$.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care legea de compoziție „$\circ$” este asociativă.

5p **c)** Pentru $a = -1$ rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $4^x \circ 2^x = 1$.

11. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2013 · Speciala Subiect V03 · V03

2013_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Speciala_Subiect_V03.pdf

	1. Pentru fiecare număr real x se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{pmatrix}$.
5p	**a)** Calculaţi $\det(A(2))$.
5p	**b)** Arătaţi că $A(1)\cdot A(2)=5A(1)$.
5p	**c)** Determinaţi numerele reale x pentru care $\det(A(x))=0$.

12. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2013 · Speciala Subiect V03 · V03

2013_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Speciala_Subiect_V03.pdf

2. Se consideră polinomul $f=X^3-2X^2-2X+m$, unde m este număr real.

5p **a)** Pentru $m=3$, calculaţi $f(1)$.

5p **b)** Determinaţi numărul real m ştiind că restul împărţirii polinomului f la $X-2$ este egal cu 2.

5p **c)** Pentru $m=4$, arătaţi că $(x_1+x_2+x_3)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)=1$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

13. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2013 · Toamna August · V09

2013_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V09.pdf

	1. Pentru fiecare număr real x se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ x & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$.
5p	**a)** Arătaţi că $A(2)+A(6)=2A(4)$.
5p	**b)** Determinaţi numărul real x pentru care $\det(A(x))=0$.
5p	**c)** Determinați inversa matricei $A(2)$.

14. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2013 · Toamna August · V09

2013_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V09.pdf

2. Se consideră x_1, x_2 și x_3 rădăcinile complexe ale polinomului $f = X^3 + X^2 + mX + m$, unde m este un număr real.

5p **a)** Arătați că f este divizibil cu $X + 1$, pentru orice număr real m.

5p **b)** Determinați numărul real m pentru care $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 11$.

5p **c)** Determinați valorile reale ale lui m știind că $|x_1| = |x_2| = |x_3|$.

15. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2013 · Vara Iunie · V02

2013_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V02.pdf

	1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.
5p	**a)** Calculaţi $\det A$.
5p	**b)** Arătaţi că $A^2-6A=I_2$.
5p	**c)** Determinaţi inversa matricei $B=A-6I_2$.

16. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2013 · Vara Iunie · V02

2013_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V02.pdf

2. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie asociativă dată de $x * y = \sqrt{x^2 + y^2 + 4}$.

5p **a)** Calculaţi $2 * 2$.

5p **b)** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x * x = \sqrt{12}$.

5p **c)** Arătaţi că numărul $\underbrace{1 * 1 * \cdots * 1}_{1 \text{ de } 8 \text{ ori}}$ este întreg.

17. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2014 · Model Oficial

2014_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Model_Oficial_Subiect.pdf

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătaţi că $A\cdot B=B\cdot A$.

5p **b)** Verificaţi dacă $\det(A+B)>\det A+\det B$.

5p **c)** Determinaţi numărul matricelor $X=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}$ pentru care $X^2=A$, unde a şi b sunt numere reale.

18. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2014 · Model Oficial

2014_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Model_Oficial_Subiect.pdf

2. Se consideră x_1, x_2, x_3 rădăcinile complexe ale polinomului $f = X^3 + X + a$, unde a este număr real.

5p **a)** Pentru $a = -2$, arătaţi că $f(1) = 0$.

5p **b)** Determinaţi numărul real a, ştiind că $(2 - x_1)(2 - x_2)(2 - x_3) = 2$.

5p **c)** Pentru $a \neq 0$, determinaţi un polinom de grad trei, având coeficienţii reali, care are rădăcinile $\frac{1}{x_1}$, $\frac{1}{x_2}$ şi $\frac{1}{x_3}$.

19. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2014 · Simulare Nationala

2014_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Simulare_Nationala_Subiect.pdf

	1. Se consideră determinantul $D(a,b)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & a & b\\ 1 & a^2 & b^2\end{vmatrix}$, unde a și b sunt numere reale.
5p	**a)** Calculați $D(1,0)$.
5p	**b)** Arătați că $D(a,b)=(a-1)(b-1)(b-a)$ pentru orice numere reale a și b.
5p	**c)** Demonstraţi că numărul $D(m,n)$ este par pentru orice numere întregi m și n.

20. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2014 · Simulare Nationala

2014_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Simulare_Nationala_Subiect.pdf

2. Se consideră inelul $(\mathbb{Z}_6,+,\cdot)$, unde $\mathbb{Z}_6=\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\hat{3},\hat{4},\hat{5}\}$.

5p **a)** Rezolvaţi în $\mathbb{Z}_6$ ecuaţia $\hat{3}x+\hat{2}=\hat{5}$.

5p **b)** Determinați mulțimea valorilor funcției $f:\mathbb{Z}_6\to\mathbb{Z}_6$, $f(x)=x^3-x$.

5p **c)** Determinaţi numărul elementelor mulţimii $H=\{x^{10}\mid x\in\mathbb{Z}_6\}$.

21. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2014 · Speciala Subiect V09 · V09

2014_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Speciala_Subiect_V09.pdf

	1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 2a+1 & 1 \\ 1-a & 2 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
5p	**a)** Calculaţi $\det(A(1))$.
5p	**b)** Determinaţi numărul real a ştiind că $\det(A(a))=1$.
5p	**c)** Determinaţi inversa matricei $A(0)$.

22. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2014 · Speciala Subiect V09 · V09

2014_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Speciala_Subiect_V09.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = 2xy - 3x - 3y + 6$.

5p **a)** Calculați $1 \circ 2$.

5p **b)** Arătaţi că $x \circ y = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(y - \frac{3}{2}\right) + \frac{3}{2}$ pentru orice numere reale x şi y.

5p **c)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x \circ x = 2$.

23. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2014 · Toamna August · V07

2014_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V07.pdf

	1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
5p	**a)** Calculaţi $\det B$.
5p	**b)** Arătaţi că $AB=BA$.
5p	**c)** Determinaţi numerele reale x pentru care $\det\left(B+xA\right)=1$.

24. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2014 · Toamna August · V07

2014_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V07.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=xy-4\left(x+y-5\right)$.

5p **a)** Calculați $4*5$.

5p **b)** Arătați că $x*y=\left(x-4\right)\left(y-4\right)+4$ pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Calculați $1*2*3*\cdots*2014$.

25. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2014 · Vara Iunie · V01

2014_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V01.pdf

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Calculați $\det(A(2))$.

5p **b)** Determinaţi numărul real x pentru care $A(x)\cdot A(-x)=I_2$, unde $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **c)** Arătați că $\det(A(1)+A(2)+\cdots+A(n))=\dfrac{n^2(n-1)(n+3)}{4}$ pentru orice număr natural nenul n.

26. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2014 · Vara Iunie · V01

2014_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V01.pdf

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=4\left(x+y-3\right)-xy$.

5p **a)** Calculaţi $2*4$.

5p **b)** Arătaţi că $x*y=4-\left(x-4\right)\left(y-4\right)$ pentru orice numere reale x şi y.

5p **c)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x*x*x=x$.

27. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2015 · Model Oficial

2015_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Model_Oficial_Subiect.pdf

	1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} 2 & x \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Calculaţi $\det(A(3))$.
5p	**b)** Arătați că $A(-2015)+A(2015)=2A(0)$.
5p	**c)** Determinaţi numerele reale x pentru care $\det(A(x))=x^2$.

28. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2015 · Model Oficial

2015_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Model_Oficial_Subiect.pdf

2. În $\mathbb{Z}_5[X]$ se consideră polinomul $f = X^3 + aX$, unde $\mathbb{Z}_5 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}\}$ și $a \in \mathbb{Z}_5$.

5p **a)** Calculaţi $f(\hat{0})$.

5p **b)** Determinaţi $a \in \mathbb{Z}_5$, știind că $f(\hat{3}) = \hat{3}$.

5p **c)** Arătaţi că, dacă $f(\hat{1}) = f(\hat{2})$, atunci $f(\hat{3}) = f(\hat{4})$.

29. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2015 · Simulare Nationala

2015_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Simulare_Nationala_Subiect.pdf

	1. Se consideră matricea $A(x,a)=\begin{pmatrix} x & a & a \\ -a & x & a \\ -a & -a & x \end{pmatrix}$, unde x și a sunt numere reale.
5p	**a)** Calculați $\det(A(2,0))$.
5p	**b)** Arătați că $A(x,a)+A(x,-a)=2xA(1,0)$, pentru orice numere reale x și a.
5p	**c)** Rezolvaţi în mulțimea numerelor reale ecuația $\det(A(x,-3))=0$.

30. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2015 · Simulare Nationala

2015_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Simulare_Nationala_Subiect.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = 3xy + 3x + 3y + 2$.

5p **a)** Arătați că $x \circ y = 3(x+1)(y+1) - 1$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați numerele întregi a și b, știind că $a \circ b = 2$.

5p **c)** Calculaţi $(-1) \circ 0 \circ 1 \circ \ldots \circ 2015$.

31. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2015 · Speciala Subiect V09 · V09

2015_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Speciala_Subiect_V09.pdf

	1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ şi $B(x)=\begin{pmatrix}x & 2\\ 3 & 6\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det A=-2$.
5p	**b)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\det\left(B(x)+I_2\right)=8$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.
5p	**c)** Determinaţi numărul real x pentru care $A\cdot B(x)=B(x)\cdot A$.

32. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2015 · Speciala Subiect V09 · V09

2015_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Speciala_Subiect_V09.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=xy-7x-7y+56$.

5p **a)** Arătați că $(-7)*7=7$.

5p **b)** Arătați că $x*y=(x-7)(y-7)+7$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Calculați $1*2*3*\cdots*2015$.

33. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2015 · Toamna August · V01

2015_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V01.pdf

	1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 3 \\ a-1 & 2 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
5p	**a)** Arătați că $A(2014)+A(2016)=2A(2015)$.
5p	**b)** Determinați numărul real a pentru care $\det(A(a))=0$.
5p	**c)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\det(A(2)+xA(3))=0$.

34. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2015 · Toamna August · V01

2015_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V01.pdf

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=-xy-x-y-2$.

5p **a)** Arătaţi că $(-1)*1=-1$.

5p **b)** Arătaţi că $x*y=-(x+1)(y+1)-1$, pentru orice numere reale x şi y.

5p **c)** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $(x+2)*(2x-3)=5$.

35. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2015 · Vara Iunie · V08

2015_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V08.pdf

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 1 & -a \\ -a & 1 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=1$.

5p **b)** Determinați numerele reale a, pentru care $\det(A(a))=0$.

5p **c)** Arătați că $A(a)A(b)=A(a+b)+abI_2$, pentru orice numere reale a și b, unde $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

36. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2015 · Vara Iunie · V08

2015_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V08.pdf

2. Se consideră polinomul $f = X^3 - mX + 2$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $f(0) = 2$.

5p **b)** Determinați numărul real m, știind că restul împărțirii lui f la polinomul $g = X^2 + X - 2$ este egal cu 0.

5p **c)** Demonstrați că $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -6$, pentru orice număr real m, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

37. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2016 · Model Oficial

2016_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Model_Oficial_Subiect.pdf

	1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 1\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}0 & x\\ y & 0\end{pmatrix}$, unde x și y sunt numere reale.
5p	**a)** Arătați că $\det(2A)=-28$.
5p	**b)** Determinați numerele reale x și y, știind că $A+2B=I_2$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.
5p	**c)** Dacă $AB=BA$, arătați că $\det B\leq 0$.

38. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2016 · Model Oficial

2016_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Model_Oficial_Subiect.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = 3xy + 3x + 3y + 2$.

5p **a)** Arătați că $(-1) \circ 1 = -1$.

5p **b)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x \circ x = x$.

5p **c)** Determinați perechile (a,b) de numerele întregi, știind că $a \circ b = 8$.

39. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2016 · Simulare Nationala

2016_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Simulare_Nationala_Subiect.pdf

---

1. Se consideră matricea $M(x)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 1\\ x & 2x-1 & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Calculaţi $\det(M(0))$.

5p **b)** Demonstrați că $2M(x)-M(-x)=M(3x)$, pentru orice număr real x.

5p **c)** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$, $A(n,2n-1)$ şi $B(n^2,2n^2-1)$, unde n este număr natural, $n\geq 2$. Demonstrați că aria triunghiului OAB este număr natural.

40. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2016 · Simulare Nationala

2016_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Simulare_Nationala_Subiect.pdf

este număr natural, $n \geq 2$. Demonstrați că aria triunghiului OAB este număr natural.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x \circ y = 6xy - 2x - 2y + 1$.

5p **a)** Calculați $1 \circ \frac{1}{3}$.

5p **b)** Determinaţi elementul neutru al legii de compoziţie „$\circ$”.

5p **c)** Calculați $\frac{1}{1008} \circ \frac{2}{1008} \circ \frac{3}{1008} \circ \ldots \circ \frac{2016}{1008}$.

41. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2016 · Speciala Subiect V01 · V01

2016_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Speciala_Subiect_V01.pdf

	1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} 1+3x & 2x \\ -6x & 1-4x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(0))=1$.
5p	**b)** Demonstrați că $A(x)A(y)=A(x+y-xy)$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**c)** Determinați numărul real x, știind că $A(2^x)A(2^x)=A(1)$.

42. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2016 · Speciala Subiect V01 · V01

2016_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Speciala_Subiect_V01.pdf

2. Se consideră polinomul $f=X^3-X^2+aX+2$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $f(-1)+f(1)=2$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Determinați numărul real a, pentru care polinomul f este divizibil cu polinomul X^2-2X+2.

5p **c)** Demonstrați că $x_1^3+x_2^3+x_3^3+3x_1x_2+3x_2x_3+3x_1x_3=-5$, pentru orice număr real a, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

43. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2016 · Toamna August · V02

2016_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V02.pdf

	1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 2-a & 1 \\ 1 & 2-a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(2))=-1$.
5p	**b)** Demonstrați că $A(a)+A(-a)=2A(0)$, pentru orice număr real a.
5p	**c)** Determinați numărul real x, știind că $A(x)A(x)=2A(1)$.

44. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2016 · Toamna August · V02

2016_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V02.pdf

2. Se consideră polinomul $f=X^3-4X^2+mX+4$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $f(-1)+f(1)=0$, pentru orice număr real m.

5p **b)** Pentru $m=-1$, arătați că polinomul f se divide cu polinomul X^2-1.

5p **c)** Determinați numărul real m, știind că $x_1^2+x_2^2+x_3^2-4\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)=0$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

45. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2016 · Vara Iunie · V08

2016_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V08.pdf

	1. Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix} m-1 & -1 \\ 2 & m-2 \end{pmatrix}$, unde m este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(0))=4$.
5p	**b)** Demonstrați că $A(1+m)+A(1-m)=2A(1)$, pentru orice număr real m.
5p	**c)** Demonstrați că matricea $A(m)$ este inversabilă, pentru orice număr real m.

46. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2016 · Vara Iunie · V08

2016_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V08.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = -3xy + 9x + 9y - 24$.

5p **a)** Arătați că $x * y = -3(x-3)(y-3)+3$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Demonstrați că legea de compoziție „$*$” este asociativă.

5p **c)** Determinați numărul real x, pentru care $(x * x) * x = 12$.

47. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2017 · Model Oficial

2017_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Model_Oficial_Subiect.pdf

	1. Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix} m-1 & -1 \\ 2 & m-2 \end{pmatrix}$, unde m este număr real.
5p	**a)** Calculați $\det(A(0))$.
5p	**b)** Demonstrați că $A(1+m)+A(1-m)=2A(1)$, pentru orice număr real m.
5p	**c)** Demonstrați că matricea $A(m)$ este inversabilă, pentru orice număr real m.

48. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2017 · Model Oficial

2017_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Model_Oficial_Subiect.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = -3xy + 9x + 9y - 24$.

5p **a)** Arătați că $x * y = -3(x-3)(y-3)+3$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Demonstrați că legea de compoziție „$*$” este asociativă.

5p **c)** Determinați numărul real x, pentru care $(x * x) * x = 12$.

49. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2017 · Simulare Nationala

2017_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Simulare_Nationala_Subiect.pdf

	1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & x\\ 4 & 9 & x^2\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Calculați $A(1)-A(0)$.
5p	**b)** Arătați că $\det(A(x))=(x-2)(x-3)$, pentru orice număr real x.
5p	**c)** Determinați numărul real a pentru care $\det(A(a))\leq\det(A(x))$, pentru orice număr real x.

50. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2017 · Simulare Nationala

2017_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Simulare_Nationala_Subiect.pdf

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x \circ y = 4xy - 4x - 4y + 5$.

5p **a)** Arătați că $x \circ y = 4(x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Arătați că $N = 2016 \circ 2017$ este pătratul unui număr natural.

5p **c)** Determinați numerele naturale a și b pentru care $a \circ b = 13$.

51. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2017 · Speciala Subiect V04 · V04

2017_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Speciala_Subiect_V04.pdf

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x & x+1 & 1 \\ 2 & x & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=1$.

5p **b)** Determinați numărul real x, pentru care $A(x)+A(x+2)=2A(2)$.

5p **c)** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(n,n+1)$, $N(2,n)$ și $P(3,0)$. Determinați numărul natural n, știind că punctele M, N și P sunt coliniare.

52. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2017 · Speciala Subiect V04 · V04

2017_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Speciala_Subiect_V04.pdf

2. Se consideră polinomul $f = X^3 + aX^2 + X - 1$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $f(1) - f(-1) = 4$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Pentru $a = 2$, calculați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul $X^2 + X + 1$.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care $x_1 + x_2 + x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = x_1x_2x_3 - 1$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

53. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2017 · Toamna August · V10

2017_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V10.pdf

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 2x+5\\ 5 & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(-2)\right)=-4$.

5p **b)** Demonstrați că $A(x)+A(-x)=A(2017)+A(-2017)$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați numerele reale p și q, pentru care $A(0)\begin{pmatrix}p\\ q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\ 6\end{pmatrix}$.

54. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2017 · Toamna August · V10

2017_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V10.pdf

2. Pe mulţimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = xy + 6x + 6y + 30$.

5p **a)** Arătați că $x \circ y = (x+6)(y+6) - 6$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Arătați că $e = -5$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”.

5p **c)** Determinați numărul real x pentru care $x \circ (-2017) = 2017 \circ (-6)$.

55. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2017 · Vara Iunie · V02

2017_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V02.pdf

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=-1$.

5p **b)** Demonstrați că $A(x)A(y)=xyI_2$, pentru orice numere reale x și y, unde $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **c)** Determinați numărul real a, știind că $A\left(3^a\right)A\left(3^{a+1}\right)A\left(3^{a+2}\right)=A(27)$.

56. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2017 · Vara Iunie · V02

2017_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V02.pdf

2. Se consideră polinomul $f=X^3+mX^2+2X-4$, unde m este număr real.

5p **a)** Pentru $m=1$, arătați că $f(1)=0$.

5p **b)** Arătați că, dacă polinomul f se divide cu $X+2$, atunci restul împărțirii lui f la $X+3$ este egal cu -1.

5p **c)** Determinați numărul real m, știind că $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+x_1+x_2+x_3=\frac{1}{2}$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

57. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2018 · Model Oficial

2018_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Model_Oficial_Subiect.pdf

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$ și $I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det A=2$.

5p **b)** Determinați numerele reale x și y pentru care $A\cdot A\cdot A=xA+yI_3$.

5p **c)** Determinați inversa matricei $B=A+I_3$.

58. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2018 · Model Oficial

2018_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Model_Oficial_Subiect.pdf

2. Pe mulţimea $M=(0,+\infty)$ se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=x^{2\log_3 y}$.

5p **a)** Arătați că $2\circ 9=16$.

5p **b)** Determinați numărul real x, $x\in M$ pentru care $x\circ 3=25$.

5p **c)** Demonstraţi că legea de compoziţie „$\circ$” este comutativă.

59. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2018 · Simulare Nationala

2018_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Simulare_Nationala_Subiect.pdf

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2x \\ -2x & 1 & -2x^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Calculați $\det(A(2))$.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care $\det(A(a)+aA(0))=8$.

5p **c)** Știind că $\det((m+n)A(x))=\det(mA(x))+\det(nA(x))+18$, pentru orice număr real x, determinați numerele naturale m și n, $m<n$.

60. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2018 · Simulare Nationala

2018_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Simulare_Nationala_Subiect.pdf

2. Pe mulțimea $\mathbb{Z}_7$ se definește legea de compoziție asociativă $x * y = xy + \hat{6}x + \hat{6}y + \hat{2}$.

5p **a)** Demonstrați că $x * y = \left(x + \hat{6}\right)\left(y + \hat{6}\right) + \hat{1}$, pentru orice $x,\ y \in \mathbb{Z}_7$.

5p **b)** Demonstrați că $x * \hat{1} = \hat{1} * x = \hat{1}$, pentru orice $x \in \mathbb{Z}_7$.

5p **c)** Calculați $\hat{0} * \hat{1} * \hat{2} * \hat{3} * \hat{4} * \hat{5} * \hat{6}$.

61. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2018 · Speciala Subiect V03 · V03

2018_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Speciala_Subiect_V03.pdf

---

1. Se consideră matricea $X(a,b)=\begin{pmatrix} a & b \\ 9b & a \end{pmatrix}$, unde a și b sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $\det(X(3,1))=0$.

5p **b)** Demonstrați că $X(a,b)X(c,d)=X(ac+9bd,ad+bc)$, pentru orice numere reale a, b, c și d.

5p **c)** Determinați perechile de numere întregi (m,n) pentru care $\det(X(m,n))=1$.

62. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2018 · Speciala Subiect V03 · V03

2018_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Speciala_Subiect_V03.pdf

2. Se consideră polinomul $f=2X^3-4X^2-7X+m$, unde m este număr real.

5p **a)** Pentru $m=9$, arătați că $f(1)=0$.

5p **b)** Determinați numărul real m pentru care polinomul f este divizibil cu $X+\sqrt{2}$.

5p **c)** Determinați numărul real m, știind că suma a două rădăcini ale polinomului f este egală cu 1.

63. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2018 · Toamna August · V09

2018_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V09.pdf

---

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}-3 & -2\\ 3 & 2\end{pmatrix}$ și $M(x)=I_2+xA$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(M(1))=0$.

5p **b)** Demonstrați că $M(x)-M(2018)=M(-2018)-M(-x)$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați perechea de numere naturale nenule (m,n) pentru care $M(m)M(n)=M(mn)$.

64. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2018 · Toamna August · V09

2018_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V09.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=8xy+x+y$.

5p **a)** Arătați că $x\circ y=8\left(x+\frac{1}{8}\right)\left(y+\frac{1}{8}\right)-\frac{1}{8}$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați numerele reale x, pentru care $x\circ x=1$.

5p **c)** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=8x+1$. Demonstrați că $f(x\circ y\circ z)=f(x)\cdot f(y)\cdot f(z)$, pentru orice numere reale x, y și z.

65. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2018 · Vara Iunie · V02

2018_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V02.pdf

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}x+2 & x\\ 1 & -2\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=-7$.

5p **b)** Demonstrați că $xA(y)-yA(x)=(x-y)A(0)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numerele reale a, știind că $(aA(-1)+A(a))A(0)=(a^2+7)I_2$.

66. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2018 · Vara Iunie · V02

2018_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V02.pdf

2. Se consideră polinomul $f=4X^3-6X+m$, unde m este număr real.

5p **a)** Pentru $m=2$, arătați că $f(1)=0$.

5p **b)** Demonstrați că, oricare ar fi numărul real m, polinomul f **nu** se divide cu polinomul X^2+X+1.

5p **c)** Determinați numărul real nenul m, știind că $\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)^2=\frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}\cdot\frac{1}{x_3}$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

67. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2019 · Model Oficial

2019_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Model_Oficial_Subiect.pdf

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ 3 & 2a-1 & 1 \\ a-3 & a & 1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} 2x+ay+z=1 \\ 3x+(2a-1)y+z=1 \\ (a-3)x+ay+z=2a-1 \end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=-5$.

5p **b)** Determinați numerele reale a pentru care $\det(A(a))=0$.

5p **c)** Pentru $a=1$, determinați soluțiile (x_0,y_0,z_0) ale sistemului pentru care $x_0^2=y_0z_0$.

68. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2019 · Model Oficial

2019_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Model_Oficial_Subiect.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=5xy-5(x+y)+6$.

5p **a)** Demonstrați că $x*y=5(x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați valorile reale ale lui x pentru care $x*x*x<26$.

5p **c)** Determinați numărul natural nenul n pentru care $\frac{1}{n^2}*\frac{1}{(n+1)^2}*\frac{1}{(n+2)^2}=-19$.

69. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2019 · Simulare Nationala

2019_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Simulare_Nationala_Subiect.pdf

1. Se consideră matricea $M(x)=\begin{pmatrix} x+1 & 0 & x+2 \\ 0 & x & 0 \\ 3-x & 0 & 4-x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Calculați $\det(M(-1))$.

5p **b)** Demonstrați că $M(x)+M(y)=M(0)+M(x+y)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați perechile de numere naturale m și n, știind că suma elementelor matricei $M(m)\cdot M(1)$ este egală cu suma elementelor matricei $M(1)\cdot M(n)$.

70. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2019 · Simulare Nationala

2019_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Simulare_Nationala_Subiect.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=4x+4y-4xy-3$.

5p **a)** Demonstrați că $x*y=1-4(x-1)(y-1)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Arătați că $x*\frac{1}{x}\geq 1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $x*x*x*x=x$.

71. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2019 · Speciala Subiect V08 · V08

2019_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Speciala_Subiect_V08.pdf

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 3\end{pmatrix}$ și $M(a)=I_2+aA$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(M(1))=5$.

5p **b)** Demonstrați că $M(a)M(b)=M(a+b+4ab)$, pentru orice numere reale a și b.

5p **c)** Determinați numerele reale a pentru care $M(a)M(a)=M(2)$.

72. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2019 · Speciala Subiect V08 · V08

2019_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Speciala_Subiect_V08.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=5x+5y-xy-20$.

5p **a)** Arătați că $x*y=-(x-5)(y-5)+5$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați valorile reale ale lui x pentru care $x*x\geq x$.

5p **c)** Calculați $1*(-2)*3*(-4)*\ldots*(-2018)*2019$.

73. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2019 · Toamna August · V07

2019_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V07.pdf

	1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 1+4a & -6a \\ 2a & 1-3a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(1))=2$.
5p	**b)** Demonstrați că $A(a)A(b)=A(a+b+ab)$, pentru orice numere reale a și b.
5p	**c)** Determinați perechile de numere naturale m și n pentru care $A(m)A(n)=A(2)$.

74. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2019 · Toamna August · V07

2019_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V07.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = 2xy - 2x - 2y + 3$.

5p **a)** Arătați că $x \circ y = 2(x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați valorile reale ale lui x pentru care $x \circ x \leq 9$.

5p **c)** Calculați $1^n \circ 2^n \circ 3^n \circ \ldots \circ 2019^n$, pentru orice număr natural nenul n.

75. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2019 · Vara Iunie · V06

2019_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V06.pdf

---

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 4 \\ -4 & a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(-1)\right)=17$.

5p **b)** Demonstrați că $A(2019-a)+A(2019+a)=2A(2019)$, pentru orice număr real a.

5p **c)** Determinați perechile de numere reale x și y, pentru care $A(x)A(y)=2A(-8)$.

76. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2019 · Vara Iunie · V06

2019_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V06.pdf

2. Pe mulţimea $G=(-2,2)$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=\dfrac{4x+4y}{4+xy}$.

5p **a)** Arătați că 0 este elementul neutru al legii de compoziţie „$*$”.

5p **b)** Determinați $x\in G$, pentru care $x*x=\dfrac{8}{5}$.

5p **c)** Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to G$, $f(x)=\dfrac{2(x-1)}{x+1}$. Demonstrați că $f(xy)=f(x)*f(y)$, pentru orice $x,y\in(0,+\infty)$.

77. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Model Oficial

2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Model_Oficial_Subiect.pdf

---

1. Se consideră matricea $A(a,b)=\begin{pmatrix} a & 2b \\ -b & a \end{pmatrix}$, unde a și b sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1,1))=3$.

5p **b)** Demonstrați că $A(a,b)\cdot A(b,a)=A\left(-ab,a^2+b^2\right)$, pentru orice numere reale a și b.

5p **c)** Determinați perechile de numere întregi m și n pentru care $\det(A(m,n))=1$.

78. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Model Oficial

2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Model_Oficial_Subiect.pdf

2. Se consideră polinomul $f=X^3-15X^2+mX-80$, unde m este număr real.

5p **a)** Pentru $m=95$, arătați că $f(1)=1$.

5p **b)** Determinați numărul real m pentru care $x_1(x_1-x_2)+x_2(x_2-x_3)+x_3(x_3-x_1)=0$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Determinați rădăcinile polinomului f, știind că acestea sunt numere reale în progresie aritmetică.

79. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Speciala Subiect V01 · V01

2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Speciala_Subiect_V01.pdf

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x+2 & x+3 \\ x-3 & x-2 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(x))=5$, pentru orice număr real x.

5p **b)** Determinați numărul natural n astfel încât $A(-3)+A(-2)+A(-1)+A(1)+A(2)+A(3)=nA(0)$.

5p **c)** Determinați numărul real x pentru care $A(x)\cdot A(1)=\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -4 & -7 \end{pmatrix}$.

80. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Speciala Subiect V01 · V01

2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Speciala_Subiect_V01.pdf

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x * y = \dfrac{x + y + 1}{x^2 + y^2 + 1}$.

5p **a)** Arătați că $0 * 1 = 1$.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $x * x = 1$.

5p **c)** Demonstrați că $x * (-x) \leq 1$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al III-lea

81. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test01

2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test01.pdf

---

1. Se consideră matricele $A(x)=\begin{pmatrix} x & 3 \\ -3 & x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(x))=x^2+9$, pentru orice număr real x.

5p **b)** Demonstrați că $A(2020-x)+A(2020+x)=2A(2020)$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați numărul natural n, pentru care $A(n)A(2-n)=2A(-6)$.

82. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test02

2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test02.pdf

---

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}4 & -6\\ 2 & -3\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $M(x)=I_2+xA$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det A=0$.

5p **b)** Demonstrați că $M(x)M(y)=M(x+y+xy)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați perechile de numere naturale (m,n) pentru care $M(m)M(n)=M(6)$.

83. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test03

2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test03.pdf

---

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} 1+x & x \\ 2x & 1+2x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=4$.

5p **b)** Demonstrați că $A(x)A(y)=A(x+y+3xy)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numerele reale a pentru care $A(a)A(a)=A(5)$.

84. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test04

2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test04.pdf

---

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ și $M(x)=A+xB$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(M(1))=0$.

5p **b)** Demonstrați că $M(x)M(y)=M(y)M(x)$ dacă și numai dacă $x=y$.

5p **c)** Determinați perechile de numere întregi (m,n) pentru care $M\left(m^2+1\right)M\left(n^2\right)=M\left(n^2\right)M\left(m^2+1\right)$.

85. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test05

2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test05.pdf

---

1. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} x+ay=1 \\ 2x+y+az=4 \\ -3x-y+z=1 \end{cases}$, unde a este număr real și $A(a)$ matricea coeficienților sistemului.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=1$.

5p **b)** Pentru $a=-1$, determinați soluția sistemului de ecuații.

5p **c)** Demonstrați că, pentru orice număr rațional p, matricea $A(p)$ este inversabilă.

86. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test06

2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test06.pdf

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $M(x,y)=xI_2+yA$, unde x și y sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $\det A=-1$.

5p **b)** Demonstrați că $M(x,y)\cdot M(a,b)=M(xa+yb,xb+ya)$, pentru orice numere reale a, b, x și y.

5p **c)** Determinați perechile (x,y) de numere reale, știind că $\det(M(x,y))=4$ și suma elementelor matricei $M(x,y)\cdot M(x,y)$ este egală cu 8.

87. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test07

2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test07.pdf

---

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 1 & -2 & 1\\ a & 1 & 1\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+y-2z=1\\ x-2y+z=2\\ ax+y+z=3\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(1)\right)=-9$.

5p **b)** Demonstrați că suma elementelor matricei $B(a)=A(a)\cdot A(a)$ **nu** depinde de numărul real a.

5p **c)** Pentru $a=-2$, arătați că sistemul de ecuații este incompatibil.

88. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test08

2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test08.pdf

---

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ln a \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde $a\in(0,+\infty)$.

5p **a)** Arătați că $\det(A(e))=e$.

5p **b)** Demonstrați că $\det\left(A\left(a^2\right)\right)=\det\left(A(a)\cdot A(a)\right)$, pentru orice $a\in(0,+\infty)$.

5p **c)** Determinați numerele $a, b\in(0,+\infty)$ pentru care $A(a)+A(b)=2A(a)\cdot A(b)$.

89. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test09

2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test09.pdf

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & a & -1\\ 1 & -1 & -a\\ a & -1 & 1\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+ay-z=a\\ x-y-az=-1\\ ax-y+z=-1\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=-4$.

5p **b)** Determinați mulțumea valorilor reale ale lui a pentru care matricea $A(a)$ este inversabilă.

5p **c)** Arătați că sistemul de ecuații **nu** admite nicio soluție (x_0,y_0,z_0) pentru care $x_0=y_0=z_0$.

90. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test10

2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test10.pdf

1. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} \left(m^2-1\right)x+my+4z=1 \\ x+y+z=0 \\ mx+3y+z=-1 \end{cases}$, unde m este număr real.

5p **a)** Determinați numărul real m pentru care tripletul $(-1,0,1)$ este soluție a sistemului de ecuații.

5p **b)** Determinați mulțimea valorilor reale ale lui m pentru care sistemul de ecuații admite soluție unică.

5p **c)** Determinați numerele $m\in\mathbb{Z}\setminus\{-7,2\}$, pentru care sistemul de ecuații admite soluția (x_0,y_0,z_0), cu $x_0,y_0,z_0\in\mathbb{Z}$.

91. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test11

2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test11.pdf

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 3 & 13 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det A=\det\left(A+I_2\right)$.

5p **b)** Determinați numărul real a, știind că $A\cdot A\cdot A=aI_2$.

5p **c)** Determinați perechile (m,n) de numere naturale, cu $m\neq n$, pentru care $\det\left(A+mI_2\right)=\det\left(A+nI_2\right)$.

92. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test12

2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test12.pdf

---

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}5-a & 10\\ -2 & -4-a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=0$.

5p **b)** Determinați numărul real a, știind că $A(a)\cdot A(a)=A(0)$.

5p **c)** Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea $A(-1)\cdot X=A(0)$.

93. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test13

2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test13.pdf

---

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & \ln a\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, unde $a\in(0,+\infty)$.

5p **a)** Arătați că $\det(A(a))=1$, pentru orice $a\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Demonstrați că $A(a)\cdot A(b)=A(ab)$, pentru orice $a,b\in(0,+\infty)$.

5p **c)** Determinați $a\in(0,+\infty)$, astfel încât $A(a)\cdot A(a)\cdot A(a)=\begin{pmatrix}1 & 2020\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

94. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test14

2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test14.pdf

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & a \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} x+2y-z=-1 \\ -2x-3y=1 \\ 2x+4y+az=-2 \end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(a))=a+2$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Pentru $a=0$, determinați inversa matricei $A(a)$.

5p **c)** Pentru $a\neq -2$, rezolvați sistemul de ecuații.

95. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test15

2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test15.pdf

---

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} 2^x & 0 \\ 0 & 3^x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(x))=6^x$, pentru orice număr real x.

5p **b)** Determinați numărul real x, știind că $A(x)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot A(x)$.

5p **c)** Demonstrați că, orice matrice $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $X\cdot X=A(1)$ are două elemente numere iraționale.

96. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test16

2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test16.pdf

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ a & 2 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(a))=4$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Arătați că $A(a)\cdot A(b)=2A(a+b)$, pentru orice numere reale a și b.

5p **c)** Determinați numărul real x și numărul natural n pentru care $A(1)\cdot A(2)\cdot\ldots\cdot A(5)=2^n A(x)$.

97. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test17

2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test17.pdf

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}1 & a\\ a^2 & a^3\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(a))=0$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $\det(A(2)+xI_2)=0$.

5p **c)** Arătați că, dacă $A(a)\cdot A(b)=A(b)\cdot A(a)$, atunci $a=b$.

98. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test18

2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test18.pdf

1. Se consideră matricea $A(a,b)=\begin{pmatrix} a+1 & a-1 \\ b & b-2 \end{pmatrix}$, unde a și b sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(2,3)\right)=0$.

5p **b)** Demonstrați că, dacă $a\in\mathbb{Q}$ și $b\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, atunci matricea $A(a,b)$ este inversabilă.

5p **c)** Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $A\left(-1,\sqrt{2}\right)\cdot X=A(0,0)$.

99. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test19

2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test19.pdf

---

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 3\\ 2 & -1 & a\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+2y-z=2\\ y+3z=4\\ 2x-y+az=2\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(1)\right)=18$.

5p **b)** Determinați mulțimea valorilor reale ale lui a pentru care sistemul de ecuații are soluție unică.

5p **c)** Pentru $a=1$, rezolvați sistemul de ecuații.

100. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test20

2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test20.pdf

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+z=1\\ y+z=2\\ x+y=a\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det A=-2$.

5p **b)** Arătați că matricea $B=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$ este inversa matricei A.

5p **c)** Determinați numărul real a, știind că sistemul de ecuații are soluția (x_0,y_0,z_0) cu x_0, y_0, z_0 termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

101. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test01

2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test01.pdf

2. Pe mulțimea $M=[0,+\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\sqrt{x^2+y^2}$.

5p **a)** Arătați că $N=\sqrt{33}*\sqrt{31}$ este un număr natural.

5p **b)** Determinați numărul $x\in M$ pentru care $(x*x*x)^2=300$.

5p **c)** Se consideră funcția $f:(-\infty,0]\to[0,+\infty)$, $f(x)=\sqrt{-2020x}$. Arătați că $f(x+y)=f(x)*f(y)$, pentru orice $x,y\in(-\infty,0]$.

102. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test02

2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test02.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = xy - x - y + 2$.

5p **a)** Arătați că $x \circ y = (x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați mulțimea valorilor reale ale lui x pentru care $x \circ x \leq 5$.

5p **c)** Calculați $1^n \circ 2^n \circ 3^n \circ \ldots \circ 2020^n$, pentru orice număr natural nenul n.

103. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test03

2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test03.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=5\left(x+y-4\right)-xy$.

5p **a)** Arătați că $x*y=-\left(x-5\right)\left(y-5\right)+5$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați mulțimea valorilor reale ale lui x pentru care $x*x\geq x$.

5p **c)** Calculați $1*\left(-2\right)*3*\left(-4\right)*\ldots*2019*\left(-2020\right)$.

104. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test04

2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test04.pdf

2. Pe mulţimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = x + y + 7xy$.

5p **a)** Arătați că $x \circ y = 7\left(x + \frac{1}{7}\right)\left(y + \frac{1}{7}\right) - \frac{1}{7}$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați numerele reale x, pentru care $x \circ x = 5$.

5p **c)** Dați exemplu de numere distincte $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ pentru care numărul $a \circ b$ este natural.

105. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test05

2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test05.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziţie asociativă şi cu element neutru $x*y=xy-101x-101y+10302$.

5p **a)** Arătaţi că $x*y=(x-101)(y-101)+101$, pentru orice numere reale x şi y.

5p **b)** Determinaţi numerele reale care sunt egale cu simetricul lor în raport cu legea „$*$”.

5p **c)** Determinaţi numerele întregi x şi y, cu $x<y$, pentru care $x*y=202$.

106. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test06

2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test06.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definesc legile de compoziție $x*y=x+y-1$ și $x\circ y=xy-x-y+2$.

5p **a)** Arătați că $2\circ(1*3)=(2\circ 1)*(2\circ 3)$.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $3^{x\circ x}=\left(\frac{1}{9}\right)^{x*x}$.

5p **c)** Determinați numerele reale x și y pentru care $(x-1)*(2y+1)=2$ și $(x+y)\circ 4=10$.

107. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test07

2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test07.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=xy+m(x+y)$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $(-1)*1=-1$, pentru orice număr real m.

5p **b)** Demonstrați că $x*y=(x+m)(y+m)-m^2$, pentru orice numere reale x, y și m.

5p **c)** Pentru $m=-1$, determinați numerele reale x pentru care $5^x*5^{x+1}=-1$.

108. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test08

2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test08.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = 3xy - 3\sqrt{2}(x+y) + 6 + \sqrt{2}$.

5p **a)** Arătați că $\sqrt{2} \circ 1 = \sqrt{2}$.

5p **b)** Demonstrați că $x \circ y = 3\left(x - \sqrt{2}\right)\left(y - \sqrt{2}\right) + \sqrt{2}$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Calculați $\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{1}} \circ \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \circ \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} \circ \ldots \circ \frac{\sqrt{2020}}{\sqrt{2017}}$.

109. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test09

2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test09.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\sqrt[3]{x^3+y^3+8}$.

5p **a)** Arătați că $2020*(-2020)=2$.

5p **b)** Determinați elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Știind că $(\mathbb{R},*)$ este grup, demonstrați că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+8$ este morfism de la grupul $(\mathbb{R},*)$ la grupul $(\mathbb{R},+)$.

110. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test10

2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test10.pdf

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziție asociativă $x \circ y = x + y + 11xy$.

5p **a)** Demonstrați că $x \circ y = 11\left(x + \frac{1}{11}\right)\left(y + \frac{1}{11}\right) - \frac{1}{11}$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați numerele reale x, pentru care $x \circ x = \frac{8}{11}$.

5p **c)** Calculați partea întreagă a numărului $a = \left(1 - \frac{1}{11}\right) \circ \left(1 - \frac{2}{11}\right) \circ \left(1 - \frac{3}{11}\right) \circ \left(1 - \frac{4}{11}\right)$.

111. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test11

2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test11.pdf

2. Pe mulțimea $M=(0,1)$ se definește legea de compoziție $x\circ y=\dfrac{xy}{1-x-y+2xy}$.

5p **a)** Arătați că $x\circ\dfrac{1}{2}=x$, pentru orice $x\in M$.

5p **b)** Demonstrați că legea de compoziție „$\circ$” este comutativă.

5p **c)** Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to(0,1)$, $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$. Arătați că $f(x)\circ f(y)=f(xy)$, pentru orice $x,\ y\in(0,+\infty)$.

112. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test12

2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test12.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = 3x - 2y + 1$.

5p **a)** Arătați că $5 * 8 = 0$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $2020^x * 2020^x = 2$.

5p **c)** Demonstrați că există o infinitate de perechi (m,n) de numere întregi pentru care $m * n = 0$.

113. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test13

2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test13.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = \frac{1}{3}xy + x + y$.

5p **a)** Demonstrați că $x \circ y = \frac{1}{3}(x+3)(y+3) - 3$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 3$. Arătați că $f(xy) = f(x) \circ f(y)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Demonstrați că $x_1 \circ x_2 \circ \ldots \circ x_n = \frac{(x_1+3)(x_2+3)\cdot\ldots\cdot(x_n+3) - 3^n}{3^{n-1}}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ și orice numere reale $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ și x_n.

114. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test14

2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test14.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=5(x+2)(y+2)-2$.

5p **a)** Arătați că $x*(-2)=-2$, pentru orice număr real x.

5p **b)** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{e^x-10}{5}$. Demonstrați că $f(x+y)=f(x)*f(y)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numărul real x, astfel încât $x*x*x=23$.

115. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test15

2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test15.pdf

2. Pe mulţimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = x^2 + xy + y^2$.

5p **a)** Arătați că $x \circ x \geq 0$, pentru orice număr real x.

5p **b)** Se consideră numerele reale a și b cu $a \neq b$. Determinați numărul real x pentru care $x \circ a = x \circ b$.

5p **c)** Determinați numărul real x cu proprietatea că $x \circ (x+1) = -x^3$.

116. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test16

2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test16.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = x + y - 7$.

5p **a)** Arătați că $5 \circ 2 = 0$.

5p **b)** Se consideră funcția $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 7 + \log_7 x$. Arătați că $f(x) \circ f(y) = f(xy)$, pentru orice $x, y \in (0,+\infty)$.

5p **c)** Demonstrați că $a^2 \circ b^2 \neq 0$, pentru orice numere întregi a și b.

117. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test17

2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test17.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = \sqrt[3]{x^2 + y^2}$.

5p **a)** Arătați că $0 * 8 = 4$.

5p **b)** Demonstrați că legea de compoziție „$*$” **nu** are element neutru.

5p **c)** Demonstrați că există o infinitate de perechi (m, n) de numere naturale nenule pentru care numărul $m * n$ este natural nenul.

118. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test18

2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test18.pdf

2. Pe mulțimea numerelor întregi se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = 5xy + x + y$.

5p **a)** Arătați că $1 \circ 4 = 25$.

5p **b)** Demonstrați că $e = 0$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”.

5p **c)** Determinați elementele simetrizabile în raport cu legea de compoziție „$\circ$”.

119. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test19

2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test19.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=2xy-x-y+1$.

5p **a)** Arătați că $2*\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

5p **b)** Determinați numărul real a, astfel încât $a*x=a$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$. Demonstrați că $f(x*y)=f(x)\cdot f(y)$, pentru orice numere reale x și y.

120. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test20

2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test20.pdf

2. Pe mulțimea numerelor complexe se definește legea de compoziție asociativă și cu element neutru $z_1 \circ z_2 = iz_1z_2 + z_1 + z_2$.

5p **a)** Arătați că $i \circ i = i$.

5p **b)** Demonstrați că $z_1 \circ z_2 = i(z_1 - i)(z_2 - i) + i$, pentru orice numere complexe z_1 și z_2.

5p **c)** Demonstrați că simetricul numărului $\frac{1}{2}(1+i)$ în raport cu legea de compoziție „$\circ$” este număr real.

121. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Toamna August · V03

2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V03.pdf

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, unde a și b sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $\det(A\cdot A)=a^2b^2$, pentru orice numere reale a și b.

5p **b)** Se consideră matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $A\cdot X=X\cdot A$. Demonstrați că, dacă a și b sunt numere reale distincte, atunci există numerele reale x și t astfel încât $X=\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$.

5p **c)** Pentru $a=4$ și $b=0$, determinați matricele $Y\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $Y\cdot Y=A$.

122. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Toamna August · V03

2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V03.pdf

2. Pe mulţimea $M=[0,+\infty)$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=x\sqrt{y+1}+y\sqrt{x+1}$.

5p **a)** Arătați că $3*3=12$.

5p **b)** Demonstrați că $x*0=0*x=x$, pentru orice $x\in M$.

5p **c)** Determinați $x\in M$ pentru care $\left(x^2+2x\right)*3=7$.

123. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Vara Iunie · V06

2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V06.pdf

---

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 12+a & a \\ 1+a & 3+a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(0)\right)=36$.

5p **b)** Determinați numerele reale a pentru care $\det\left(A(a)-(12+a)I_2\right)=0$, unde $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **c)** Se consideră matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea $X\cdot X=A(0)$. Arătaţi că cel puţin un element al matricei X este număr iraţional.

124. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Vara Iunie · V06

2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V06.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = x + \sqrt[3]{y} - 2$.

5p **a)** Arătați că $1 \circ 1 = 0$.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care $x \circ a = x$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $x \circ x^6 = 4$.

125. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2021 · Model Oficial

2021_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Model_Oficial_Subiect.pdf

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 2a-1 & 4a-4 \\ 1-a & 3-2a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(2))=1$.

5p **b)** Demonstrați că $A(a)\cdot A(b)=A(a+b-1)$, pentru orice numere reale a și b.

5p **c)** Determinați numărul natural n, știind că $A(1)\cdot A(2)\cdot A(2^2)\cdot A(2^3)\cdot A(2^4)=A(32)\cdot A(-n)$.

126. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2021 · Model Oficial

2021_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Model_Oficial_Subiect.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = 3x^2 - 5xy + 2y^2$.

5p **a)** Arătați că $1 \circ 2 = 1$.

5p **b)** Demonstrați că $x \circ x = 0$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $2^x \circ 3^x = 0$.

127. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2021 · Simulare Nationala

2021_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Simulare_Nationala_Subiect.pdf

1. Se consideră a un număr real nenul și matricea $A(x)=\begin{pmatrix} 1+2x & 0 & -4x \\ 0 & a & 0 \\ x & 0 & 1-2x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(x))=a$, pentru orice număr real x.

5p **b)** Determinați numărul real nenul a astfel încât $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Pentru $a=1$, determinați matricea $X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ pentru care $A(2)\cdot X=A(3)$.

128. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2021 · Simulare Nationala

2021_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Simulare_Nationala_Subiect.pdf

2. Pe mulțimea $M=[0,+\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\log_2\left(2^x+2^y-1\right)$.

5p **a)** Arătați că $0*2021=2021$.

5p **b)** Determinați elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Determinați $x\in M$ pentru care $x*(x+1)*(x+2)=\log_2 54$.

129. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test01

2021_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test01.pdf

---

1. Se consideră matricea $A(a,b)=\begin{pmatrix} a & a-2 \\ b+1 & b-1 \end{pmatrix}$, unde a și b sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(1,0)\right)=0$.

5p **b)** Demonstrați că, dacă $a\in(-\infty,0)$ și $b\in(0,+\infty)$, atunci matricea $A(a,b)$ este inversabilă.

5p **c)** Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $A(1,3)\cdot X=A(2,1)$.

130. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test02

2021_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test02.pdf

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -a & 1 \\ 2 & a & -1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} 3x+y-z=1 \\ x-ay+z=3 \\ 2x+ay-z=2 \end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(2))=-3$.

5p **b)** Determinați numerele reale a pentru care matricea $B(a)=A(a)\cdot A(a)$ are două elemente egale cu 0.

5p **c)** Pentru $a=1$, arătați că sistemul de ecuații nu are soluții.

131. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test03

2021_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test03.pdf

1. Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix} 4 & 1 & m \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} 4x+y+mz=9 \\ x+2y-z=4 \\ -2x-3y=-7 \end{cases}$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(m))=m-10$, pentru orice număr real m.

5p **b)** Determinați inversa matricei $A(9)$.

5p **c)** Demonstrați că, pentru orice număr real m, $m\neq 10$, dacă (a,b,c) este soluția sistemului de ecuații, atunci $\log_2 a=b+c$.

132. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test04

2021_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test04.pdf

---

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $M(a,b)=aI_2+bA$, unde a și b sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $\det A=0$.

5p **b)** Demonstrați că $M(a,b)\cdot M(x,y)=M(ax,ay+bx)$, pentru orice numere reale a, b, x și y.

5p **c)** Arătați că, dacă x și y sunt numere reale pentru care matricele $B=M(x,2y)+M(y,2x)$ și $C=M\left(x\sqrt{2},1\right)\cdot M\left(y\sqrt{2},1\right)$ sunt egale, atunci $x^2+y^2=0$.

133. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test05

2021_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test05.pdf

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{a} \\ 1 & 0 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$, unde $a\in(0,+\infty)$.

5p **a)** Arătați că $\det(A(4))=1$.

5p **b)** Demonstrați că $\det(A(a)\cdot A(1)-A(a+1))>0$, pentru orice $a\in(0,+\infty)$.

5p **c)** Arătați că matricea $B(n)=A(1^2)+A(2^2)+A(3^2)+\ldots+A(n^2)$ este inversabilă, pentru orice număr natural n, $n\geq 2$.

134. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test06

2021_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test06.pdf

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -a \\ 1 & a & -1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} ax+2y+z=1 \\ 2x+4y-az=1 \\ x+ay-z=0 \end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=-3$.

5p **b)** Determinați valorile reale ale lui a pentru care matricea $A(a)$ este inversabilă.

5p **c)** Arătați că sistemul de ecuații **nu** admite nicio soluție (x_0,y_0,z_0) astfel încât $x_0=\frac{y_0}{2}=\frac{z_0}{3}$.

135. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test07

2021_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test07.pdf

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 2a & 1 & 1 \\ 1 & 2a & 1 \\ 1 & a & -1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} 2ax+y+z=0 \\ x+2ay+z=1 \\ x+ay-z=-1 \end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $\det(A(-1))=-3$.

5p **b)** Determinați valorile reale ale lui a pentru care sistemul de ecuații admite soluție unică.

5p **c)** Determinați numărul întreg a, știind că există numerele reale y_0 și z_0 astfel încât $(1, y_0, z_0)$ este soluție a sistemului de ecuații.

136. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test08

2021_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test08.pdf

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & a+1 \\ a+2 & a+3 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=-2$.

5p **b)** Arătaţi că matricea $A(a)$ este inversabilă, pentru orice număr real a.

5p **c)** Demonstraţi că, dacă a şi b sunt numere întregi și $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $A(a)\cdot X=A(b)$, atunci elementele matricei X sunt numere întregi.

137. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test09

2021_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test09.pdf

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} 1+5x & -2x \\ 10x & 1-4x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=2$.

5p **b)** Demonstraţi că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y+xy)$, pentru orice numere reale x şi y.

5p **c)** Determinaţi perechile de numere întregi (m,n) pentru care matricea $A(m)$ este inversa matricei $A(n)$.

138. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test10

2021_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test10.pdf

1. Se consideră matricele $A(x)=\begin{pmatrix} 4^x & 0 \\ 0 & 9^x \end{pmatrix}$, unde x este număr real și $B=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det(A(x))=6^{2x}$, pentru orice număr real x.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $A(x)\cdot B=B\cdot A(x)$.

5p **c)** Demonstrați că orice matrice $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $X\cdot X=A(1)$ are toate elementele numere întregi.

139. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test11

2021_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test11.pdf

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$ şi $B(a,b)=\begin{pmatrix}1 & a\\ b & 1\end{pmatrix}$, unde a şi b sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $\det\left(B(1,2)\right)=-1$.

5p **b)** Arătați că $\det\left(A\cdot B(a,b)\right)=0$, pentru orice numere reale a şi b.

5p **c)** Determinați numerele reale a şi b pentru care $A\cdot B(a,b)=B(a,b)\cdot A$.

140. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test12

2021_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test12.pdf

---

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 1 & a \\ -a & 1 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A\left(\sqrt{2}\right)\right)=3$.

5p **b)** Arătați că matricea $A(a)$ este inversabilă, pentru orice număr real a.

5p **c)** Determinați numărul întreg k pentru care $A(1)\cdot A(1)\cdot A(1)\cdot A(1)\cdot A(1)=kA(1)$.

141. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test01

2021_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test01.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = 3xy - (x + y) + \frac{2}{3}$.

5p **a)** Arătați că $1 \circ (-1) = -\frac{7}{3}$.

5p **b)** Demonstrați că $x \circ y = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(y - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Calculați $1 \circ \frac{1}{\sqrt{2}} \circ \frac{1}{\sqrt{3}} \circ \ldots \circ \frac{1}{\sqrt{2021}}$.

142. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test02

2021_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test02.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y-xy$.

5p **a)** Arătați că $(-3)*3=9$.

5p **b)** Demonstrați că $x*y=\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $2^x*4^{x-1}=\frac{1}{4}$.

143. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test03

2021_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test03.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=7(x-3)(y-3)+3$.

5p **a)** Arătați că $x*3=3$, pentru orice număr real x.

5p **b)** Determinați numărul real x, astfel încât $x*x*x=-46$.

5p **c)** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{5^x}{7}+3$. Demonstrați că $f(x)*f(y)=f(x+y)$, pentru orice numere reale x și y.

144. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test04

2021_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test04.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definesc legile de compoziție $x*y=xy+2x+2y+2$ și $x\circ y=x+y+2$.

5p **a)** Arătați că $(1*2)\circ(1*3)=1*(2\circ 3)$.

5p **b)** Demonstrați că $x*e=e$, pentru orice număr real x, unde e este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”.

5p **c)** Determinați numărul natural n pentru care $n*(-n)\geq n\circ(-n)$.

145. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test05

2021_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test05.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = \sqrt{3}(xy+4)-3(x+y)$.

5p **a)** Arătați că $\sqrt{3} \circ 2 = \sqrt{3}$.

5p **b)** Demonstrați că $x \circ y = \sqrt{3}\left(x-\sqrt{3}\right)\left(y-\sqrt{3}\right)+\sqrt{3}$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Calculați $3^1 \circ 3^{\frac{1}{2}} \circ 3^{\frac{1}{3}} \circ \ldots \circ 3^{\frac{1}{2021}}$.

146. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test06

2021_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test06.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\sqrt[3]{x^3+y^3-27}$.

5p **a)** Arătați că $2021*(-2021)=-3$.

5p **b)** Determinați elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x+27}$. Demonstrați că $f(x)*f(y)=f(x+y)$, pentru orice numere reale x și y.

147. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test07

2021_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test07.pdf

soluție a sistemului de ecuații.

2. Pe mulţimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = x + 5xy + y$.

5p **a)** Verificați dacă $e = 0$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”.

5p **b)** Demonstrați că $x \circ y = 5\left(x + \frac{1}{5}\right)\left(y + \frac{1}{5}\right) - \frac{1}{5}$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Calculați partea întreagă a numărului $q = \left(-\frac{1}{2}\right) \circ \left(-\frac{1}{3}\right) \circ \ldots \circ \left(-\frac{1}{2021}\right)$.

148. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test08

2021_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test08.pdf

2. Pe mulţimea $A=(0,+\infty)$ se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=\frac{2x}{y}+\frac{2y}{x}$.

5p **a)** Arătaţi că numărul $a=2\circ 4$ este întreg.

5p **b)** Arătaţi că $x\circ y\geq 4$, pentru orice $x,y\in A$.

5p **c)** Arătaţi că legea de compoziţie „$\circ$” **nu** admite element neutru.

149. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test09

2021_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test09.pdf

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x \circ y = xy + x + 2ay$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $1 \circ 0 = 1$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Determinaţi numărul real a, știind că $x \circ 1 > 4$ dacă și numai dacă $x \in (3, +\infty)$.

5p **c)** Arătaţi că legea de compoziţie „$\circ$” este asociativă dacă şi numai dacă $a = \frac{1}{2}$.

150. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test10

2021_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test10.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = 2x^2 + xy + 2y^2$.

5p **a)** Arătați că $2 \circ 1 = 12$.

5p **b)** Se consideră numerele reale a, b și c astfel încât $2a + 2b + c \neq 0$. Știind că $c \circ a = c \circ b$, demonstrați că $a = b$.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $x \circ (x+1) = 5x^3 + 2$.

151. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test11

2021_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test11.pdf

2. Pe mulțimea $M=[1,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x\circ y=|x-y|+1$.

5p **a)** Arătați că $3\circ 5=3$.

5p **b)** Calculați $a-b$, știind că $a=(2\circ 3)\circ 4$ și $b=2\circ(3\circ 4)$.

5p **c)** Arătați că există o infinitate de perechi (m,n) de numere naturale nenule pentru care $m\circ n=m$.

152. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test12

2021_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test12.pdf

2. Pe mulţimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă și cu element neutru $x \circ y = 3xy - 2x - 2y + 2$.

5p **a)** Arătați că numărul $\frac{1}{3} \circ \frac{1}{3}$ este întreg.

5p **b)** Arătați că $x \circ x \geq \frac{2}{3}$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați numărul real x pentru care $x \circ x \circ x = e$, unde e este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”.

153. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2021 · Toamna August · V04

2021_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V04.pdf

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $A(x,y)=\begin{pmatrix}x+3y & 4y\\ -2y & x-3y\end{pmatrix}$, unde x și y sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1,1))=0$.

5p **b)** Demonstrați că, dacă matricea $A(x,y)$ este inversabilă, atunci $|x|\neq|y|$.

5p **c)** Determinați perechile (m,n), de numere întregi, pentru care $A(m,n)\cdot A(-m,n)=I_2$.

154. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2021 · Toamna August · V04

2021_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V04.pdf

2. Pe mulţimea $A=[0,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x\circ y=4^{xy}-(1-x-y)$.

5p **a)** Arătați că $2\circ 0=2$.

5p **b)** Arătați că $x\circ\frac{1}{x}\geq 5$, pentru orice $x\in A$, $x\neq 0$.

5p **c)** Demonstrați că, dacă m și n sunt numere naturale impare, atunci $m\circ n$ este număr natural impar.

155. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2021 · Vara Iunie · V02

2021_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V02.pdf

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}1+2^a & 2^a\\ -2^a & 1-2^a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=1$.

5p **b)** Arătați că $A(1)+A(2)-A(1)\cdot A(2)=I_2$.

5p **c)** Se consideră numerele naturale m şi n, astfel încât $A(m)\cdot A(n)=A(m+n)$. Arătaţi că $m=n=1$.

156. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2021 · Vara Iunie · V02

2021_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V02.pdf

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x * y = x^2 + y^2 + x + y$.

5p **a)** Arătați că $(-1) * (-1) = 0$.

5p **b)** Demonstrați că $x * y = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$, pentru orice numere reale x şi y.

5p **c)** Determinați mulțimea valorilor reale ale lui x pentru care $x^2 * x^2 \leq 4$.

SUBIECTUL al III-lea **(30**

157. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2022 · Model Oficial

2022_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Model_Oficial_Subiect.pdf

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x^2 & 1 \\ x-1 & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(-1)\right)=3$.

5p **b)** Demonstrați că matricea $A(x)$ este inversabilă, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $A(1)\cdot X\cdot A(1)=A(2)$.

158. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2022 · Model Oficial

2022_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Model_Oficial_Subiect.pdf

2. Pe mulţimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă și cu element neutru $x \circ y = xy - \sqrt{2}\left(x + y - 1\right) + 2$.

5p **a)** Arătați că $\sqrt{2} \circ 0 = \sqrt{2}$.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $\left(x - \sqrt{2}\right) \circ \left(x + \sqrt{2}\right) = x$.

5p **c)** Determinați numerele raționale al căror simetric în raport cu legea de compoziție „$\circ$” este număr rațional.

159. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2022 · Simulare Nationala

2022_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Simulare_Nationala_Subiect.pdf

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ și $B(x)=xI_2+iA$, unde x este număr real și $i^2=-1$.

5p **a)** Arătați că $\det A=1$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $B(3)\cdot B(5)=8B(x)$.

5p **c)** Determinați perechile (m,n) de numere întregi pentru care matricea $B(m)+iB(n)$ **nu** este inversabilă.

160. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2022 · Simulare Nationala

2022_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Simulare_Nationala_Subiect.pdf

2. Pe mulțimea $M=[1,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x*y=xy-\sqrt{(x-1)(y-1)}$.

5p **a)** Arătați că $2*5=8$.

5p **b)** Arătați că $e=1$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Demonstrați că $(nx)*y\geq x(n*y)$, pentru orice $x,y\in M$ și orice număr natural n, $n\geq 2$.

161. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2022 · Speciala Subiect V03 · V03

2022_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Speciala_Subiect_V03.pdf

1. Se consideră matricele $M(x)=\begin{pmatrix} x+1 & -x \\ -2x & 2x+1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(M(1))=4$.

5p **b)** Arătați că $M(x)\cdot M(1)=M(4x+1)$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați numărul real x pentru care $M(x)\cdot M(1)\cdot M(1)=M(x+2)$.

162. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2022 · Speciala Subiect V03 · V03

2022_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Speciala_Subiect_V03.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = 5xy + 10x + 10y + 18$.

5p **a)** Arătați că $(-1) \circ 0 = 8$.

5p **b)** Demonstrați că $x \circ y = 5(x+2)(y+2) - 2$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numărul întreg m pentru care $m \circ m = m$.

163. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2022 · Toamna August · V07

2022_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V07.pdf

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}1 & -x\\ x & x+1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=3$.

5p **b)** Arătați că $A(-1)\cdot A(2)-A(-1)=2I_2$.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $A(x)\cdot A(-x)+xA(x)=3I_2$.

164. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2022 · Toamna August · V07

2022_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V07.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = 4(xy+1) - 3(x+y)$.

5p **a)** Arătați că $1 \circ 2 = 3$.

5p **b)** Arătați că, dacă $a \circ 3 = 4$, atunci $a \circ (-a) = 0$.

5p **c)** Determinați valorile reale ale lui x pentru care $(x \circ 1) \circ (x-1) \leq 4$.

165. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2022 · Vara Iunie · V01

2022_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V01.pdf

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $B(x)=\begin{pmatrix}x & 3-x\\ 2-x & x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det A=0$.

5p **b)** Arătați că $B(x)-B(0)=xA$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Arătați că matricea $C(a)=B(a)\cdot B(1)-B(a+1)$ este inversabilă, pentru orice număr întreg a.

166. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2022 · Vara Iunie · V01

2022_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V01.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=(2x-1)(2y-1)+1$.

5p **a)** Arătați că $1*2=4$.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $x*x=2$.

5p **c)** Determinați numărul întreg nenul m pentru care $m*\left(1+\frac{1}{m}\right)=1$.

167. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2023 · Model Oficial

2023_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Model_Oficial_Subiect.pdf

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 1 & a+1 \\ 1 & a & -1 \\ 2 & -a & 4 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} ax+y+(a+1)z=a \\ x+ay-z=4 \\ 2x-ay+4z=-4 \end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=-9$.

5p **b)** Determinați mulțimea valorilor reale ale lui a pentru care sistemul are soluție unică.

5p **c)** Arătați că, dacă sistemul are soluția unică (x_0, y_0, z_0), atunci $x_0+y_0+z_0=2$.

168. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2023 · Model Oficial

2023_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Model_Oficial_Subiect.pdf

2. Se consideră polinomul $f=X^3-3X^2+2X+m$, unde m este număr real.

5p **a)** Pentru $m=6$, arătați că $f(-1)=0$.

5p **b)** Determinați numărul real m pentru care polinomul f este divizibil cu polinomul $g=X^2+2$.

5p **c)** Determinați numărul real m pentru care $x_1^3+x_2^3+x_3^3=0$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

169. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2023 · Simulare Nationala

2023_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Simulare_Nationala_Subiect.pdf

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}x+1&-1&1\\0&x&0\\1&-1&x+1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=3$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $A(0)\cdot A(x)=A(0)$.

5p **c)** Determinați numerele reale a și b pentru care $(A(1))^{-1}=aA(1)+bI_3$, unde $(A(1))^{-1}$ este inversa matricei $A(1)$.

170. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2023 · Simulare Nationala

2023_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Simulare_Nationala_Subiect.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = xy + x + y - 1 + 2^{xy}$.

5p **a)** Arătați că $1 * 2 = 8$.

5p **b)** Arătați că $e = 0$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Determinați numărul natural nenul n pentru care $n * \left(-\frac{1}{n}\right) = 0$.

171. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2023 · Speciala Subiect V06 · V06

2023_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Speciala_Subiect_V06.pdf

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}1-a & a\\ -3a & 3a+1\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(2))=5$.

5p **b)** Arătați că $A(a)-I_2=a(A(1)-I_2)$, pentru orice număr real a.

5p **c)** Determinați numărul întreg m pentru care $A(m)\cdot A(2m)=A(1)$.

172. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2023 · Speciala Subiect V06 · V06

2023_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Speciala_Subiect_V06.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = xy - x - y + 4$.

5p **a)** Arătați că $0 \circ 3 = 1$.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $x \circ x = 3x$.

5p **c)** Determinați numărul real a, știind că $x \circ a = x + a$, pentru orice număr real x.

173. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2023 · Toamna August · V07

2023_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V07.pdf

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -2\end{pmatrix}$ și $B(x)=\begin{pmatrix}x+1 & 2x+1\\ x-1 & 2x-1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(B(2))=4$.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care $B(0)\cdot B(1)=aA$.

5p **c)** Determinați numărul real x pentru care $A\cdot B(x)=A\cdot(B(0)-3I_2)$.

174. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2023 · Toamna August · V07

2023_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V07.pdf

2. Se consideră polinomul $f=X^3+2X^2+mX-3$, unde m este număr real.

5p **a)** Pentru $m=0$, arătați că $f(1)=0$.

5p **b)** Determinați numărul real m pentru care polinomul f este divizibil cu polinomul $X+1$.

5p **c)** Determinați numărul real m pentru care $(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)=x_1x_2x_3$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

175. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2023 · Vara Iunie · V01

2023_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V01.pdf

	1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}3+a & 2-2a\\ 1-a & 1+3a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(0))=1$.
5p	**b)** Arătați că $A(0)\cdot(A(a)-A(0))=aI_2$, pentru orice număr real a.
5p	**c)** Demonstrați că $\det(A(a^2)-aA(a))\geq 0$, pentru orice număr real a.

176. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2023 · Vara Iunie · V01

2023_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V01.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = x^2 - 4xy + 3y^2$.

5p **a)** Arătați că $0 \circ 2 = 12$.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $(2x) \circ x = -1$.

5p **c)** Determinați perechile (m,n) de numere întregi, cu $m < n$, pentru care $m \circ n = 3$.

177. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2024 · Model Oficial

2024_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Model_Oficial_Subiect.pdf

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x & -2x \\ 1 & x-6 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(6))=12$.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care $A(4)\cdot A(4)=aA(4)$.

5p **c)** Determinați perechile (m,n) de numere naturale nenule, cu $m<n$, pentru care $\det(A(m)+A(n))=0$.

178. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2024 · Model Oficial

2024_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Model_Oficial_Subiect.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = xy\left(x + y - xy\right)$.

5p **a)** Arătați că $1 * 3 = 3$.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $x * 2 = -x^2$.

5p **c)** Determinați numărul întreg nenul m pentru care $\frac{1}{2m} * m = m$.

179. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2024 · Simulare Nationala

2024_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Simulare_Nationala_Subiect.pdf

	1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}x & 3x-3\\ 1-x & 3x-2\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(0))=3$.
5p	**b)** Determinați numărul real m pentru care $A(2)\cdot A(0)+A(5)=mI_2$.
5p	**c)** Determinați numerele reale x pentru care $\det(A(x)-A(0)\cdot A(1-x))=3$.

180. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2024 · Simulare Nationala

2024_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Simulare_Nationala_Subiect.pdf

2. Pe mulțimea $M=(0,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x\circ y=x+y+1-\sqrt{xy+1}$.

5p **a)** Arătați că $1\circ 8=7$.

5p **b)** Determinați $x\in M$ pentru care $x\circ\frac{3}{x}=x$.

5p **c)** Determinați numerele naturale nenule n pentru care $\left(n\circ(n+2)\right)\circ(n+4)>\frac{n^2}{2}$.

181. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2024 · Speciala Subiect V09 · V09

2024_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Speciala_Subiect_V09.pdf

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ și $B(x)=\begin{pmatrix}x+1 & x+4\\ 2x & 4x-3\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det A=1$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $\det\left(B(x)-xA\right)=x$.

5p **c)** Determinați numărul real x pentru care $B(x)+B(x+2)=2A\cdot A\cdot A$.

182. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2024 · Speciala Subiect V09 · V09

2024_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Speciala_Subiect_V09.pdf

2. Se consideră polinomul $f=X^3+mX^2-2X-4$, unde m este număr real.

5p **a)** Pentru $m=6$, arătați că $f(1)=1$.

5p **b)** Determinați numărul real m pentru care $(x_1x_2x_3)^2=x_1+x_2+x_3+x_1x_2x_3$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Determinați rădăcinile polinomului f, știind că restul împărțirii lui f la polinomul $X-2$ este egal cu 8.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

183. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2024 · Toamna August · V03

2024_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V03.pdf

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ și $B(x)=\begin{pmatrix}x & x-3\\ 3-x & x-4\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det A=1$.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care $B(4)\cdot B(4)+I_2=aB(4)$.

5p **c)** Determinați numărul real x pentru care $A\cdot B(x)=B(x)\cdot A$.

184. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2024 · Toamna August · V03

2024_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V03.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=(x+y)(4-x-y)$.

5p **a)** Arătați că $0*3=3$.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $x*1=0$.

5p **c)** Determinați numerele naturale n pentru care numărul $N=(n+5)*(n-5)$ este natural.

185. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2024 · Vara Iunie · V10

2024_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V10.pdf

---

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$ și $B(a)=\begin{pmatrix}a & a+1\\ a-3 & 4a-1\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(B(1))=7$.

5p **b)** Arătați că $B(2)-B(0)\cdot B(1)=4A$.

5p **c)** Determinați numerele reale a pentru care matricea $C(a)=B(a)-aA$ **nu** este inversabilă.

186. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2024 · Vara Iunie · V10

2024_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V10.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = xy - 2x - 3y + 6$.

5p **a)** Arătați că $2 * 2 = 0$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $x * 6 = x$.

5p **c)** Determinați mulțimea numerelor reale x pentru care $x * (2 * x) \geq 2$.

187. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2025 · Model Oficial

2025_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Model_Oficial_Subiect.pdf

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & 4\end{pmatrix}$ și $M(a)=\begin{pmatrix}a & 1\\ 2-2a & 2-a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det A=2$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $M(2)\cdot A=xM(1)$.

5p **c)** Determinați numerele reale a pentru care $\left(M(a)-2I_2\right)\cdot M(a)=(a+2)I_2$.

188. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2025 · Model Oficial

2025_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Model_Oficial_Subiect.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = (x-6)(y-6)+6$.

5p **a)** Arătați că $9 \circ 8 = 12$.

5p **b)** Arătați că $e = 7$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”.

5p **c)** Determinați numerele reale nenule x pentru care $x \circ \frac{6}{x} = 6x$.

189. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2025 · Speciala Subiect V03 · V03

2025_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Speciala_Subiect_V03.pdf

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}2+2x & x\\ -x & 2-2x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(1)\right)=1$.

5p **b)** Arătați că $A(2)\cdot A(1)+3A(-2)=16I_2$.

5p **c)** Determinați numărul întreg nenul m pentru care matricea $B(m)=\frac{1}{m}A(-m)$ este inversa matricei $A(m)$.

190. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2025 · Speciala Subiect V03 · V03

2025_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Speciala_Subiect_V03.pdf

2. Se consideră polinomul $f=X^3-3X^2-3X+a$, unde a este număr real.

5p **a)** Pentru $a=1$, arătați că $f(-1)=0$.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care $3x_1+3x_2+3x_3-x_1x_2x_3=3$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Pentru $a=9$, determinați rădăcinile polinomului f.

191. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2025 · Toamna August · V03

2025_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V03.pdf

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}2+2x & x\\ -x & 2-2x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=1$.

5p **b)** Arătați că $A(2)\cdot A(1)+3A(-2)=16I_2$.

5p **c)** Determinați numărul întreg nenul m pentru care matricea $B(m)=\frac{1}{m}A(-m)$ este inversa matricei $A(m)$.

192. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2025 · Toamna August · V03

2025_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V03.pdf

2. Se consideră polinomul $f=X^3-3X^2-3X+a$, unde a este număr real.

5p **a)** Pentru $a=1$, arătați că $f(-1)=0$.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care $3x_1+3x_2+3x_3-x_1x_2x_3=3$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Pentru $a=9$, determinați rădăcinile polinomului f.

193. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2025 · Vara Iunie · V01

2025_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V01.pdf

	1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $A=\begin{pmatrix}-2 & 8\\ -1 & 3\end{pmatrix}$.
5p	**a)** Arătați că $\det A=2$.
5p	**b)** Arătați că matricea $B=\frac{1}{2}\left(I_2-A\right)$ este inversa matricei A.
5p	**c)** Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $\left(A-I_2\right)\cdot X=2A$.

194. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2025 · Vara Iunie · V01

2025_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V01.pdf

2. Pe mulțimea $M=[0,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x*y=x+y-\sqrt{xy}$.

5p **a)** Arătați că $1*4=3$.

5p **b)** Determinați $x\in M$ pentru care $x*(9x)=x^2$.

5p **c)** Determinați numărul real x pentru care $2^x*2^{x+2}=6^x$.

195. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2026 · Model Oficial

2026_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Model_Oficial_Subiect.pdf

	1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}x-1 & 1\\ 1-x & x-5\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(6))=10$.
5p	**b)** Determinați numărul real a pentru care $A(3)\cdot A(3)=aI_2$.
5p	**c)** Demonstrați că numărul $N=\det(A(m)\cdot A(2)-A(m-1))$ este natural, pentru orice număr întreg m.

196. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2026 · Model Oficial

2026_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Model_Oficial_Subiect.pdf

2. Se consideră polinomul $f=X^3+aX^2-2X+2$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $f(0)=2$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care $x_1x_2x_3(1+x_1+x_2+x_3)=4$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Știind că polinomul f este divizibil cu polinomul $X+1$, determinați restul împărțirii lui f la polinomul X^2-2.

197. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2026 · Rezerva Toamna August · V05

2026_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Rezerva_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V05.pdf

	1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}x-2 & -1-x\\ 3x & x+4\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(2))=18$.
5p	**b)** Arătați că matricea $B=4I_2-A(1)$ este inversa matricei $A(1)$.
5p	**c)** Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $12X-3A(1)\cdot X=A(5)$.

198. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2026 · Rezerva Toamna August · V05

2026_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Rezerva_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V05.pdf

2. Se consideră polinomul $f=X^3+2X^2+mX+4$, unde m este număr real.

5p **a)** Pentru $m=2$, arătați că $f(-2)=0$.

5p **b)** Pentru $m=1$, determinați restul împărțirii polinomului f la polinomul $g=X+1$.

5p **c)** Determinați rădăcinile polinomului f, știind că produsul a două dintre acestea este egal cu 1.

199. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2026 · Speciala Subiect V02 · V02

2026_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Speciala_Subiect_V02.pdf

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}2x+1 & 0\\ 4x & x+1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=6$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $A(-2)\cdot A(1)-4I_2=A(x)$.

5p **c)** Demonstrați că $\det\left(A(x)+A\left(\frac{1}{x}\right)-2I_2\right)\geq 8$, pentru orice număr real nenul x.

200. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2026 · Speciala Subiect V02 · V02

2026_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Speciala_Subiect_V02.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = x^2 - xy - x + 2y + 1$.

5p **a)** Arătați că $1 \circ 1 = 2$.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $x \circ (2x) = 1$.

5p **c)** Determinați perechile (m, n) de numere naturale pentru care $m \circ n = m$.

201. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2026 · Toamna August · V04

2026_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V04.pdf

	1. Se consideră matricea $A(x,y)=\begin{pmatrix} x+y & xy \\ 4 & x+y \end{pmatrix}$, unde x și y sunt numere reale.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(1,2))=1$.
5p	**b)** Arătați că matricea $A(x,y)$ este inversabilă, pentru orice numere reale distincte x și y.
5p	**c)** Determinați numerele reale x și y pentru care $A(x,2)\cdot A(x,2)=4A(y,0)$.

202. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2026 · Toamna August · V04

2026_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V04.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = 5 - \frac{x+y}{2} + xy$.

5p **a)** Arătați că $1 * 3 = 6$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $x * 5 = 2x$.

5p **c)** Determinați perechile (m, n) de numere naturale pentru care $(m-n) * (m+n) = m^2$.

203. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2026 · Vara Iunie · V03

2026_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V03.pdf

---

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}2a+2 & -a\\ a-3 & 1\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=2$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $A(0)\cdot(6I_2-A(2)-A(-2))=xI_2$.

5p **c)** Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $A(1)\cdot X\cdot A(1)=4I_2$.

204. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2026 · Vara Iunie · V03

2026_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V03.pdf

2. Se consideră polinomul $f=X^3-aX+2+a$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $f(1)=3$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care polinomul f este divizibil cu polinomul $g=X+2$.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care $x_1^3+x_2^3+x_3^3=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.